

11.1

- a) Satunnaisesti valittu suomalainen kuuluu veriryhmään B todennäköisyydellä
 $P(B) = 0,18$.

Satunnaisesti valitulla suomalaisella on reesustekijä todennäköisyydellä
 $P(Rh+) = 0,86$.

Koska reesustekijän esiintyminen on riippumaton veriryhmästä, voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”veriryhmä on B+” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(B+) &= P(B \text{ ja } Rh+) & P(A \text{ ja } B) &= P(A) \cdot P(B) \\&= P(B) \cdot P(Rh+) \\&= 0,18 \cdot 0,86 \\&\approx 0,15\end{aligned}$$

- b) Satunnaisesti valittu suomalainen kuuluu veriryhmään AB todennäköisyydellä
 $P(AB) = 0,08$.

Reesustekijää ei ole $100\% - 86\% = 14\%$ suomalaisista. Satunnaisesti valitulla suomalaisella ei ole reesustekijää todennäköisyydellä
 $P(Rh-) = 0,14$.

Koska reesustekijän esiintyminen on riippumaton veriryhmästä, voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”veriryhmä on AB-” todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(AB-) &= P(AB \text{ ja } Rh-) & P(A \text{ ja } B) &= P(A) \cdot P(B) \\&= P(AB) \cdot P(Rh-) \\&= 0,08 \cdot 0,14 \\&\approx 0,011\end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,15
b) 0,011

11.2

- a) Molemmat osuvat kymppiin, kun Hemmo osuu kymppiin ja Maija osuu kymppiin.

$$P(\text{Hemmo osuu}) = 0,70$$

$$P(\text{Maija osuu}) = 0,80$$

Oletetaan, että Hemmon ja Maijan osumatarkkuudet ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”molemmat osuvat kymppiin” todennäköisyys.

$$P(\text{molemmat osuvat})$$

$$= P(\text{Hemmo osuu ja Maija osuu})$$

$$= P(\text{Hemmo osuu}) \cdot P(\text{Maija osuu}) \quad P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= 0,70 \cdot 0,80$$

$$= 0,56$$

- b) Kumpikaan ei osu kymppiin, kun Hemmo ei osu kymppiin ja Maija ei osu kymppiin. Hemmo ei osu kymppiin todennäköisyydellä $100\% - 70\% = 30\%$ ja Maija ei osu kymppiin todennäköisyydellä $100\% - 80\% = 20\%$.

$$P(\text{Hemmo ei osu}) = 0,30$$

$$P(\text{Maija ei osu}) = 0,20$$

Lasketaan tapahtuman ”kumpikaan ei osu kymppiin” todennäköisyys.

$$P(\text{kumpikaan ei osu})$$

$$= P(\text{Hemmo ei osu ja Maija ei osu})$$

$$= P(\text{Hemmo ei osu}) \cdot P(\text{Maija ei osu}) \quad P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= 0,30 \cdot 0,20$$

$$= 0,06$$

- c) Hemmo osuu kymppiin todennäköisyydellä 70 % ja Maija ei osu kymppiin todennäköisyydellä 20 %.

$$P(\text{Hemmo osuu}) = 0,70$$

$$P(\text{Maija ei osu}) = 0,20$$

Lasketaan tapahtuman ”Hemmo osuu ja Maija ei osu” todennäköisyys.

$$P(\text{Hemmo osuu, Maija ei})$$

$$= P(\text{Hemmo osuu ja Maija ei osu})$$

$$= P(\text{Hemmo osuu}) \cdot P(\text{Maija ei osu}) \quad P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= 0,70 \cdot 0,20$$

$$= 0,14$$

Vastaus

a) 0,56

b) 0,06

c) 0,14

11.3

- a) Molemmat siemenet itävät, kun sitruunansiemen itää ja appelsiininsiemen itää.

$$P(\text{sitruuna itää}) = 0,40$$

$$P(\text{appelsiini itää}) = 0,30$$

Siemenet itävät toisistaan riippumatta, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{molemmat itävät}) &= P(\text{sitruuna itää ja appelsiini itää}) \\ &= P(\text{sitruuna itää}) \cdot P(\text{appelsiini itää}) \\ &= 0,40 \cdot 0,30 \\ &= 0,12 \end{aligned}$$

- b) Kumpikaan siemenistä ei idä, kun sitruunansiemen ei idä ja appelsiininsiemen ei idä. Sitruunansiemen ei idä todennäköisyydellä $100\% - 40\% = 60\%$ ja appelsiininsiemen ei idä todennäköisyydellä $100\% - 30\% = 70\%$.

$$P(\text{sitruuna ei idä}) = 0,60$$

$$P(\text{appelsiini ei idä}) = 0,70$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{kumpikaan ei idä}) &= P(\text{sitruuna ei idä ja appelsiini ei idä}) \\ &= P(\text{sitruuna ei idä}) \cdot P(\text{appelsiini ei idä}) \\ &= 0,60 \cdot 0,70 \\ &= 0,42 \end{aligned}$$

- c) Sitruunansiemen itää todennäköisyydellä 40 % ja appelsiininsiemen ei itää todennäköisyydellä 70 %.

$$P(\text{sitruuna itää}) = 0,40$$

$$P(\text{appelsiini ei itää}) = 0,70$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{sitruuna itää, appelsiini ei}) &= P(\text{sitruuna itää ja appelsiini ei itää}) \\ &= P(\text{sitruuna itää}) \cdot P(\text{appelsiini ei itää}) \\ &= 0,40 \cdot 0,70 \\ &= 0,28 \end{aligned}$$

- D) Sitruunansiemen ei itää todennäköisyydellä 60 % ja appelsiininsiemen itää todennäköisyydellä 30 %.

$$P(\text{sitruuna ei itää}) = 0,60$$

$$P(\text{appelsiini itää}) = 0,30$$

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{sitruuna ei itää, appelsiini itää}) &= P(\text{sitruuna ei itää ja appelsiini itää}) \\ &= P(\text{sitruuna ei itää}) \cdot P(\text{appelsiini itää}) \\ &= 0,60 \cdot 0,30 \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,12
- b) 0,42
- c) 0,28
- d) 0,18

11.4

Todennäköisyys, että yksittäinen pelaaja heittää nopalla ykkösen, on $\frac{1}{6}$.

Heitot ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kahdeksan ykköstä” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{kahdeksan ykköstä}) &= P(1. \text{ ykkönen ja } 2. \text{ ykkönen ja } \dots \text{ ja } 8. \text{ ykkönen}) \\ &= P(1. \text{ ykkönen}) \cdot P(2. \text{ ykkönen}) \cdot \dots \cdot P(8. \text{ ykkönen}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \dots \cdot \frac{1}{6}}_{\text{8 kappaletta}} \\ &= \frac{1}{6}^8 \\ &= 0,000000595 \end{aligned}$$

Vastaus

0,000 000 595

11.5

- a) Kolmessa kysymyksessä on neljä vastausvaihtoehtoa. Tällöin todennäköisyys vastata yksittäiseen kysymykseen arvaamalla oikein on $\frac{1}{4}$.

Viidessä kysymyksessä on kolme vastausvaihtoehtoa. Tällöin todennäköisyys vastata yksittäiseen kysymykseen arvaamalla oikein on $\frac{1}{3}$.

Vastaukset ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kaikki oikein” todennäköisyys.

$$P(\text{kaikki oikein}) = \frac{1}{4}^3 \cdot \frac{1}{3}^5 = 0,0000643$$

- b) Kolmessa kysymyksessä on neljä vastausvaihtoehtoa, joista kolme on väärin. Tällöin todennäköisyys vastata yksittäiseen kysymykseen arvaamalla väärin on $\frac{3}{4}$.

Viidessä kysymyksessä on kolme vastausvaihtoehtoa, joista kaksi on väärin. Tällöin todennäköisyys vastata yksittäiseen kysymykseen arvaamalla väärin on $\frac{2}{3}$.

Vastaukset ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”ei yhtään oikein” todennäköisyys.

$$P(\text{ei yhtään oikein}) = \frac{3}{4}^3 \cdot \frac{2}{3}^5 \approx 0,0556$$

Vastaus

- a) 0,000 064 3
b) 0,055 6

11.6

- a) Todennäköisyys, että syntyvä lapsi on poika, on

$$P(\text{lapsi on poika}) = 0,511.$$

Oletetaan, että syntyvien lasten sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kolme poikaa” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{kolme poikaa}) &= P(1. \text{ on poika ja } 2. \text{ on poika ja } 3. \text{ on poika}) \\ &= P(1. \text{ on poika}) \cdot P(2. \text{ on poika}) \cdot P(3. \text{ on poika}) \\ &= 0,511 \cdot 0,511 \cdot 0,511 \\ &= 0,511^3 \\ &\approx 0,133 \end{aligned}$$

- b) Syntyvistä lapsista tyttöjä on $100\% - 51,1\% = 48,9\%$.

Todennäköisyys, että syntyvä lapsi on tyttö, on

$$P(\text{lapsi on tyttö}) = 0,489.$$

Oletetaan, että syntyvien lasten sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kolme tyttöä” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{kolme tyttöä}) &= P(1. \text{ on tyttö ja } 2. \text{ on tyttö ja } 3. \text{ on tyttö}) \\ &= P(1. \text{ on tyttö}) \cdot P(2. \text{ on tyttö}) \cdot P(3. \text{ on tyttö}) \\ &= 0,489 \cdot 0,489 \cdot 0,489 \\ &= 0,489^3 \\ &\approx 0,117 \end{aligned}$$

- c) Todennäköisyys, että perheessä on kolme poikaa, kertoo, kuinka suuri osuus kolmilapsisista perheistä on kolmen pojan perheitä.

Kolmen pojan perheitä on siis $0,511^3 \cdot 71\,378 \approx 9520$ kappaletta.

Todennäköisyys, että perheessä on kolme tyttöä, kertoo, kuinka suuri osuus kolmilapsisista perheistä on kolmen tytön perheitä.

Kolmen tytön perheitä on siis $0,489^3 \cdot 71\,378 \approx 8350$ kappaletta.

Vastaus

- a) 0,133
b) 0,117
c) Kolmen pojan perheitä on noin 9520 ja
kolmen tytön perheitä on noin 8350.

11.7

- a) Tuomo näppäilee väärin joka 15. näppäilyyn. Hän näppäilee siis oikein 14 näppäystä 15 näppäyksestä. Todennäköisyys, että yksittäinen näppäily on oikein, on

$$P(\text{näppäily oikein}) = \frac{14}{15} \approx 0,933.$$

- b) Oletetaan, että näppäilyt ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”12 oikein” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(12 \text{ oikein}) &= P(1. \text{ oikein ja } 2. \text{ oikein ja } \dots \text{ ja } 12. \text{ oikein}) \\ &= P(1. \text{ oikein}) \cdot P(2. \text{ oikein}) \cdot \dots \cdot P(12. \text{ oikein}) \\ &= \frac{14}{15} \cdot \frac{14}{15} \cdot \dots \cdot \frac{14}{15} \\ &= \frac{14}{15}^{12} \\ &\approx 0,437 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,933

b) 0,437

11.8

- a) Virheettömiä palloja on $100\% - 5,0\% = 95\%$ tennispalloista.

Todennäköisyys, että yksittäinen pallo on virheetön, on

$$P(\text{pallo virheetön}) = 0,95.$$

Oletetaan, että virheet esiintyvät toisistaan riippumattomasti, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kaikki pallot virheettömiä” todennäköisyys.

$$P(\text{kaikki virheettömiä}) = 0,95^4 \approx 0,81$$

- b) Todennäköisyys, että pakkauksen kaikki pallot ovat virheettömiä, kertoo, kuinka suuri osuus pakkauksista sisältää ainoastaan virheettömiä palloja.

$$0,95^4 \cdot 12000 \approx 9800$$

Noin 9800 pakkausta sisältää pelkästään virheettömiä palloja.

Vastaus

a) 0,81

b) 9800 pakkauksen

11.9

Todennäköisyys, että neljän hehkulampun pakkauksessa kaikki lamput ovat virheettömiä, on 0,92.

Merkitään todennäköisyyttä, että yksittäinen lamppu on virheetön, kirjaimella p .

Virheet ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$P(\text{neljä virheetöntä}) = p^4$$

$$p^4 = 0,92 \quad | \text{ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$p \approx 0,98 \quad (\text{tai } p \approx -0,98)$$

Todennäköisyys on aina välillä $[0, 1]$, joten $p \approx 0,98$.

Vastaus

0,98

11.10

- a) Satunnaisesti valittu arpa on voittoarpa todennäköisyydellä

$$P(\text{voitto}) = 0,25.$$

Maria ostaa täsmälleen yhden arvan, jos hänen ensimmäinen arpansa on voittoarpa.

$$P(1. \text{ arpa}) = P(1. \text{ voittoa}) = 0,25.$$

- b) Maria ostaa täsmälleen kaksi arpaa, jos ensimmäinen arpa ei sisällä voittoa ja toinen arpa on voittoarpa.

Arvoista ei sisällä voittoa $100\% - 25\% = 75\%$. Satunnaisesti valittu arpa ei sisällä voittoa todennäköisyydellä

$$P(\text{ei voittoa}) = 0,75.$$

Arpojen sisältämät voitot ovat riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä.

$$\begin{aligned} P(2. \text{ arpaa}) &= P(1. \text{ ei voittoa ja } 2. \text{ voittoa}) \\ &= P(1. \text{ ei voittoa}) \cdot P(2. \text{ voittoa}) \\ &= 0,75 \cdot 0,25 \\ &\approx 0,19 \end{aligned}$$

- c) Maria ostaa täsmälleen kolme arpaa, jos kaksi ensimmäistä arpaa eivät sisällä voittoa ja kolmas arpa on voittoarpa.

$$\begin{aligned} P(3. \text{ arpaa}) &= P(1. \text{ ei voittoa ja } 2. \text{ ei voittoa ja } 3. \text{ voittoa}) \\ &= P(1. \text{ ei voittoa}) \cdot P(2. \text{ ei voittoa}) \cdot P(3. \text{ voittoa}) \\ &= 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \\ &\approx 0,14 \end{aligned}$$

- d)** Maria ostaa täsmälleen neljä arpaa, jos kolme ensimmäistä arpaa eivät sisällä voittoa ja neljäs arpa on voittoarpa.

$$P(4. \text{ arpaa})$$

$$= P(1. \text{ ei voittoa ja } 2. \text{ ei voittoa ja } 3. \text{ ei voittoa ja } 4. \text{ voittaa})$$

$$= P(1. \text{ ei voittoa}) \cdot P(2. \text{ ei voittoa}) \cdot P(3. \text{ ei voittoa}) \cdot P(4. \text{ voittaa})$$

$$= 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,25$$

$$\approx 0,11$$

Vastaus

- a)** 0,25
- b)** 0,19
- c)** 0,14
- d)** 0,11

11.11

60-vuotiaan miehen todennäköisyys elää 90-vuotiaaksi on

$$P(\text{mies elää 90-vuotiaaksi}) = \frac{215}{909}.$$

60-vuotiaan naisen todennäköisyys elää 90-vuotiaaksi on

$$P(\text{nainen elää 90-vuotiaaksi}) = \frac{378}{954}.$$

60-vuotiaita miehiä on 909, ja heistä 90-vuotiaiksi elää 215. 60-vuotiaita naisia on 954 ja heistä 90-vuotiaiksi elää 378.

Lapsella on kaksi isoisää (mies) ja kaksi isoäitiä (nainen). Oletetaan isovanhempien eliniät toisistaan riippumattomiksi, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle ”kaikki elävät 90-vuotiaiksi”.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaikki elävät 90-vuotiaiksi}) \\ &= P(\text{Pertti elää 90-v.}) \cdot P(\text{Kalevi elää 90-v.}) \\ &\quad \cdot P(\text{Maija elää 90-v.}) \cdot P(\text{Pirjo elää 90-v.}) \\ &= \frac{215}{909} \cdot \frac{215}{909} \cdot \frac{378}{954} \cdot \frac{378}{954} \\ &= \frac{215}{909}^2 \cdot \frac{378}{954}^2 \\ &\approx 0,00878 \end{aligned}$$

Vastaus

0,00878

11.12

- a) Satunnaisesti valittu lamppu on sininen todennäköisyydellä
 $P(\text{sininen}) = 0,48$.

Satunnaisesti valittu lamppu on kakkoslaatua todennäköisyydellä
 $P(\text{kakkoslaatu}) = 0,028$.

Koska maalausvirheen esiintyminen on riippumaton lampun väristä, voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”lamppu on sininen ja kakkoslaatua” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{sininen ja kakkoslaatu}) &= P(\text{sininen}) \cdot P(\text{kakkoslaatu}) \\ &= 0,48 \cdot 0,028 \\ &\approx 0,013 \end{aligned}$$

- b) Valkoisia lamppeja on $100\% - 25\% - 48\% = 27\%$ lampuista.
Satunnaisesti valittu lamppu on virheetön todennäköisyydellä

$$P(\text{valkoinen}) = 0,27.$$

Virheettömiä lamppeja on $100\% - 2,8\% = 97,2\%$ lampuista.
Satunnaisesti valittu lamppu on virheetön todennäköisyydellä

$$P(\text{virheetön}) = 0,972.$$

Koska maalausvirheen esiintyminen on riippumaton lampun väristä, voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”lamppu on valkoinen ja virheetön” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{valkoinen ja virheetön}) &= P(\text{valkoinen}) \cdot P(\text{virheetön}) \\ &= 0,27 \cdot 0,972 \\ &\approx 0,26 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,013 b) 0,26

11.13

- a) Toinen koneista on rikki todennäköisyydellä 25 % ja toinen 15 % todennäköisyydellä.

$$P(1. \text{ kone on rikki}) = 0,25$$

$$P(2. \text{ kone on rikki}) = 0,15$$

Koneet särkyvät toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”molemmat ovat rikki” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{molemmat rikki}) &= P(1. \text{ kone on rikki ja } 2. \text{ kone on rikki}) \\ &= P(1. \text{ kone on rikki}) \cdot P(2. \text{ kone on rikki}) \\ &= 0,25 \cdot 0,15 \\ &\approx 0,038 \end{aligned}$$

- b) 1. kone toimii todennäköisyydellä $100\% - 25\% = 75\%$ ja 2. kone toimii todennäköisyydellä $100\% - 15\% = 85\%$.

$$P(1. \text{ kone toimii}) = 0,75$$

$$P(2. \text{ kone toimii}) = 0,85$$

Lasketaan tapahtuman ”molemmat monistuskoneet toimivat” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{molemmat toimivat}) &= P(1. \text{ kone toimii ja } 2. \text{ kone toimii}) \\ &= P(1. \text{ kone toimii}) \cdot P(2. \text{ kone toimii}) \\ &= 0,75 \cdot 0,85 \\ &\approx 0,64 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,038

b) 0,64

11.14

Todennäköisyys, että Ville heittää yksittäisellä heitolla pienemmän silmäluvun kuin 5, on $\frac{4}{6}$.

Silmäluvuihin käyvät 1, 2, 3 ja 4.

Heitot ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kaikilla heitoilla pienempi kuin 5” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{kaikilla heitoilla pienempi kuin 5}) \\ &= P(1. \text{ heitolla alle 5 ja } 2. \text{ alle 5 ja } \dots \text{ ja } 10. \text{ alle 5}) \\ &= P(1. \text{ alle 5}) \cdot P(2. \text{ alle 5}) \cdot \dots \cdot P(10. \text{ alle 5}) \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \dots \cdot \frac{4}{6} \\ &= \frac{4^{10}}{6^{10}} \\ &= 0,0173 \end{aligned}$$

Vastaus
0,0173

11.15

- a) Todennäköisyys, että Einari saa umpimähkään valittua oikein, on ensimmäisessä ja toisessa lähdössä $\frac{1}{8}$, kolmannessa ja neljännessä lähdössä $\frac{1}{16}$ ja viidennessä lähdössä $\frac{1}{12}$.

Oikein arvaaminen kussakin lähdössä ei riipu muista arvauksista, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”5 oikein” todennäköisyys.

$P(5 \text{ oikein})$

$$\begin{aligned} &= P(1. \text{ oikein ja } 2. \text{ oikein ja } 3. \text{ oikein ja } 4. \text{ oikein ja } 5. \text{ oikein}) \\ &= P(1. \text{ oikein}) \cdot P(2. \text{ oikein}) \cdot P(3. \text{ oikein}) \cdot P(4. \text{ oikein}) \cdot P(5. \text{ oikein}) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{12} \\ &\approx 0,00000509 \end{aligned}$$

- b) Todennäköisyys, että Einari valitsee umpimähkään väärin, on ensimmäisessä ja toisessa lähdössä $\frac{7}{8}$, kolmannessa ja neljännessä lähdössä $\frac{15}{16}$ ja viidennessä lähdössä $\frac{11}{12}$.

Väärin arvaaminen kussakin lähdössä ei riipu muista arvauksista, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”ei yhtään oikein” todennäköisyys.

$P(\text{ei yhtään oikein})$

$$\begin{aligned} &= P(1. \text{ väärin ja } 2. \text{ väärin ja } 3. \text{ väärin ja } 4. \text{ väärin ja } 5. \text{ väärin}) \\ &= P(1. \text{ väärin}) \cdot P(2. \text{ väärin}) \cdot P(3. \text{ väärin}) \cdot P(4. \text{ väärin}) \cdot P(5. \text{ väärin}) \\ &= \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{11}{12} \\ &\approx 0,617 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 0,000 005 09

b) 0,617

11.16

Voitaneen olettaa, että vasemmalla kädellä kirjoittaminen ja poliittinen kanta ovat toisistaan riippumattomia. Todennäköisyys voidaan siis laskea.

Satunnaisesti valittu äänestäjä on vasenkätinen todennäköisyydellä

$$P(\text{vasenkätinen}) = 0,15.$$

Satunnaisesti valittu äänestäjä äänestää vasemmistoa todennäköisyydellä

$$P(\text{äänestää vasemmistoa}) = 0,256.$$

Oletetaan, että vasemmalla kädellä kirjoittaminen ja poliittinen kanta ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”henkilö on vasenkätinen ja äänestää vasemmistoa” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{vasenkätinen ja äänestää vasemmistoa}) \\ &= P(\text{vasenkätinen}) \cdot P(\text{äänestää vasemmistoa}) \\ &= 0,15 \cdot 0,256 \\ &\approx 0,038 \end{aligned}$$

Vastaus

0,038

11.17

- a) Yksittäinen heitto menee koriin todennäköisyydellä

$$P(\text{kori}) = 0,76.$$

Oletetaan, että vapaahheittojen onnistumiset ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle ”kaikki heitot onnistuvat”, kun heittoja on kaksi.

$$\begin{aligned} P(\text{kaikki heitot onnistuvat}) &= P(1. \text{ onnistuu ja } 2. \text{ onnistuu}) \\ &= P(1. \text{ onnistuu}) \cdot P(2. \text{ onnistuu}) \\ &= 0,76 \cdot 0,76 \\ &= 0,76^2 \\ &\approx 0,58 \end{aligned}$$

- b) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle ”kaikki heitot onnistuvat”, kun heittoja on kolme.

$$\begin{aligned} P(\text{kaikki heitot onnistuvat}) &= P(1. \text{ onnistuu ja } 2. \text{ onnistuu ja } 3. \text{ onnistuu}) \\ &= P(1. \text{ onnistuu}) \cdot P(2. \text{ onnistuu}) \cdot P(3. \text{ onnistuu}) \\ &= 0,76^3 \\ &\approx 0,44 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,58
b) 0,44

11.18

- a) Todennäköisyys, että yksittäisellä heitolla saadaan klaava, on

$$P(\text{klaava}) = \frac{1}{2}.$$

Pelaajien heitot ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kaikilla heitoilla klaava” todennäköisyys, kun heitetään neljä heittoa.

$$P(\text{kaikilla heitoilla klaava})$$

$$= P(1. \text{ klaava ja } 2. \text{ klaava ja } 3. \text{ klaava ja } 4. \text{ klaava})$$

$$= P(1. \text{ klaava}) \cdot P(2. \text{ klaava}) \cdot P(3. \text{ klaava}) \cdot P(4. \text{ klaava})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}^4$$

$$= 0,0625$$

b) TAPA 1

Todennäköisyys, että yksittäisellä heitolla ei tule klaava, on

$$P(\text{ei klaavaa}) = \frac{1}{2}.$$

Pelaajien heitot ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”ei tule yhtään klaavaa” todennäköisyys, kun heitetään neljä heittoa.

$$P(\text{ei tule yhtään klaavaa})$$

$$= P(1. \text{ ei klaava ja } 2. \text{ ei klaava ja } 3. \text{ ei klaava ja } 4. \text{ ei klaava})$$

$$= P(1. \text{ ei klaava}) \cdot P(2. \text{ ei klaava}) \cdot P(3. \text{ ei klaava}) \cdot P(4. \text{ ei klaava})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}^4$$

$$= 0,0625$$

TAPA 2

Se, ettei tule yhtään klaavaa, tarkoittaa, että kaikki heitot ovat kruunia. Koska nopanheitossa on yhtä todennäköistä saada kruuna kuin klaava, on todennäköisyys

$$P(\text{kruuna}) = P(\text{klaava}) = \frac{1}{2}.$$

Todennäköisyys saada neljä kruunaa on siis yhtä suuri kuin todennäköisyys saada neljä klaavaa eli 0,0625.

Vastaus

a) 0,0625

b) 0,0625

11.19

Virheetömiä palloja on $100\% - 3\% = 97\%$ sulkaalloista.

Todennäköisyys, että yksittäinen pallo on virheetön, on

$$P(\text{pallo virheetön}) = 0,97.$$

Oletetaan, että virheet esiintyvät toisistaan riippumattomasti, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”kaikki kotelon pallot virheetömiä” todennäköisyys.

$$P(\text{kaikki virheetömiä}) = 0,97^6$$

Todennäköisyys, että kotelon kaikki pallot ovat virheetömiä, kertoo, kuinka suuri osuus koteloista sisältää ainoastaan virheetömiä palloja. Palautettavien koteloiden lukumäärä saadaan, kun vähennetään kaikkien koteloiden lukumäärästä pelkästään virheetömiä palloja sisältävien koteloiden lukumäärä.

$$10000 - 0,97^6 \cdot 10000 \approx 1700$$

Noin 1700 pakkausta sisältää vähintään yhden virheellisen pallon, joten näin monen pakkauksen voidaan ennakoida palautuvan.

Vastaus

noin 1700

11.20

Todennäköisyys, että nolla välittyy oikein, on

$$P(\text{nolla oikein}) = 0,987.$$

Todennäköisyys, että ykkönen välittyy oikein, on

$$P(\text{ykkönen oikein}) = 0,982.$$

Viestissä on 5 nollaa ja 3 ykköstä. Oletetaan, että virheet esiintyvät toisistaan riippumattomasti, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Lasketaan tapahtuman ”viesti välittyy oikein” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{viesti oikein}) &= P(\text{kaikki nollat oikein ja kaikki ykköset oikein}) \\ &= 0,987^5 \cdot 0,982^3 \\ &\approx 0,887 \end{aligned}$$

Vastaus

0,887

11.20

- a) Joka 20. matkustaja joutuu tarkastukseen. 20 matkustajasta 19 matkustajaa ei siis joudu tarkastukseen. Todennäköisyys, että yksittäinen matkustaja ei joudu tarkastukseen, on

$$P(\text{ei tarkastusta}) = \frac{19}{20} = 0,95.$$

- b) Oletetaan, että yksittäisten matkustajien tarkastukset ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä.

Lasketaan tapahtuman ”yksikään ei joudu tarkastukseen” todennäköisyys, kun kyseessä on 20 hengen seurue.

$$P(\text{yksikään ei joudu tarkastukseen}) = 0,95^{20} \approx 0,358$$

Vastaus

- a) 0,95
b) 0,0625

11.22

Todennäköisyys, että sukkaparin molemmat sukat virheetömiä, on 0,79.

Merkitään todennäköisyyttä, että yksittäinen sukka on virheetön, kirjaimella p .

Virheet ovat toisistaan riippumattomia, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p .

$$P(\text{pari virheetön}) = p^2$$

$$p^2 = 0,79 \quad | \text{ratkaistaan CAS-laskimella}$$

$$p \approx 0,89 \quad (\text{tai } p \approx -0,89)$$

Todennäköisyys on aina välillä $[0, 1]$, joten $p \approx 0,89$.

Todennäköisyys, että yksittäinen sukka on virheetön, kertoo, kuinka monta prosenttia sukista on virheetömiä. Koneen valmistamista sukista 89 % on virheetömiä.

Vastaus

89 %

11.23

20-vuotiaan miehen todennäköisyys elää 60-vuotiaaksi on

$$P(\text{mies elää 60-vuotiaaksi}) = \frac{909}{994}.$$

20-vuotiaan naisen todennäköisyys elää 60-vuotiaaksi on

$$P(\text{nainen elää 60-vuotiaaksi}) = \frac{954}{996}.$$

20-vuotiaita miehiä on 994, ja heistä 60-vuotiaiksi elää 909.

20-vuotiaita naisia on 996 ja heistä 90-vuotiaiksi elää 954.

Oletetaan ystävysten eliniät toisistaan riippumattomiksi, joten voidaan käyttää kertolaskusääntöä. Ystävyksistä 2 on miehiä ja 3 naisia. Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle ”kaikki elävät 60-vuotiaiksi”.

$$P(\text{kaikki elävät 90-vuotiaiksi})$$

$$= \frac{909}{994}^2 \cdot \frac{954}{996}^3$$

$$\approx 0,735$$

Vastaus

0,735